

Je présente ci-dessous le scénario de séance sur la découverte du théorème de Pythagore. Dans la colonne de droite se trouvent les commentaires/questions des élèves qui ont un caractère improvisé, à gauche restent les supposés invariants échanges.

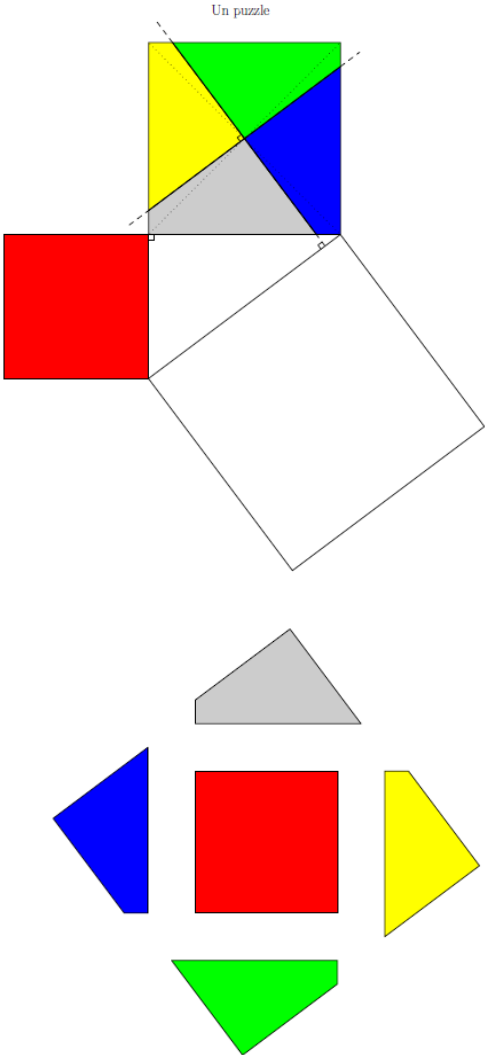
J'utilise également un code couleur :

- Rouge : les propos des élèves
- Bleu : les propos du professeur
- Vert : Les améliorations, pistes, suggestions

Dans un premier temps, je présente l'activité découverte ludique avec un puzzle, puis le bilan afin de dégager le lien mathématique vers le théorème de Pythagore.

Ensuite je leur soumetts un problème d'application pour répondre à leur question récurrence « à quoi ça sert ? » que j'intitule volontairement de la sorte.

Le même plan est présenté ensuite pour l'égalité de Pythagore (caractérisation d'un triangle rectangle).

invariant	improvisation
<p>• Activité découverte : un puzzle</p> <p style="text-align: center;">Un puzzle</p>  <p>Consignes orales : <i>Découper les 5 pièces et toutes les disposer dans le « grand carré blanc » sans chevauchement et sans laisser d' « espace vide »</i></p>	

Réactions des élèves :

Les élèves rentrent dans l'activité sans difficulté et avec entrain.

- **Bilan de l'activité**

Tous les élèves finissent par trouver, rares sont ceux qui ont besoin d'aide (placer une première pièce pour 2 élèves sur 2 classes).

Nous essayons ensuite, ensemble, par le dialogue, de lier ce jeu de puzzle aux mathématiques.

Nous essayons ensuite de traduire « mathématiquement » le fait que les pièces des deux petits carrés « rentrent dans » le plus grand carré avec un langage symbolique approprié.

Ils sont intéressés, certains pensent que « *c'est trop facile* » tout en étant enjoué et pressé de le faire, d'autres pensent que « *c'est impossible* » mais sont intrigués. J'insiste sur la notion d'impression « *oui, on peut avoir l'impression que c'est impossible, mais on va essayer tout de même pour vérifier notre idée* ».

« Mathématiquement, qu'est-ce que cela signifie de « mettre les pièces dans le grand carré blanc ? »

« En mathématiques, dans quelle situation, découpons-nous des figures pour en former d'autres ? A quoi s'intéressons-nous lorsque l'on fait cela ? »

Je voudrais qu'ils me parlent des aires des carrés. Je rencontre des difficultés à leur faire verbaliser cette notion. Il a fallu que je colorie ou hachure l'intérieur d'une pièce du puzzle pour qu'ils y pensent.

Comment formuler mes questions ?

Ils verbalisent maintenant facilement « *l'aire du grand carré est la même que les aires des deux autres carrés* ». J'attire leur attention sur le sens ambigu de leur phrase : « *l'aire du grand carré est la même que l'aire du petit noir ?* » (noir pour eux, rouge en réalité), ils pensent alors à préciser : « *l'aire des deux autres carrés ensemble* ».

On écrit alors : « *aire du carré blanc = aire carré rouge + aire du carré multicolore* »

Ce sont les élèves qui m'indiquent la notation « = » et le signe « + » suite à mes questions (« *quel symbole mathématique pouvons-nous écrire ?* »)

- **Lien avec le théorème de Pythagore**

J'attire alors leur attention sur la figure et leur demande quelle figure nous n'avons pas pris en compte. Ils voient tous le triangle. Je leur demande de préciser sa nature.

Je leur demande quel rôle à ce triangle rectangle, quel lien a-t-il avec ces carrés.

Je complète alors la figure, en notant les longueurs des côtés du triangle a, b et c.

Nous exprimons alors les aires de chaque carré.

Nous revenons à l'égalité que nous avons écrite et recopions en dessous : $c^2 = a^2 + b^2$

Ils me répondent assez rapidement que « **les carrés sont autour du triangle** », on précise le vocabulaire pour arriver à « **la longueur d'un côté de chaque carré a la longueur d'un côté du triangle rectangle** ».

En leur expliquant, le rôle des lettres, qu'elles remplacent un nombre, que ce type de puzzle fonctionnerait avec un triangle rectangle de mesures différentes (question que je pose, les élèves étaient convaincus que ce puzzle fonctionnerait avec d'autres longueurs).

Donner des figures de dimensions différentes pour l'année prochaine

Explication de la notation $c \times c = c^2$

« **Mais pourquoi disons-nous « c au carré », pourquoi le mot « carré » pour ce petit 2 ?** »

Elèves intrigués, ils n'avaient pas fait attention à ce mot « géométrique », fiers de savoir. Lien avec l'aire du carré compris, d'autres exemples : 3^2 correspond à l'aire d'un carré de longueur 3 unités, etc...

Dans une classe, aucun problème.

Dans une autre, une fois cette nouvelle égalité écrite, la formalisation effraie et une élève dit ne rien comprendre. Les autres élèves ne semblent pas avoir bien compris non plus. Je reprends l'explication (le bilan avait bien été compris). **Demander à un élève qui a compris d'expliquer à ma place.** Cette élève semble avoir des difficultés pour comprendre la notion d'aire, le calcul de l'aire d'un carré n'est pas une « évidence » pour elle. Je ré-explique mais je répète la même chose que précédemment, je ne propose pas **une autre explication ni une autre formulation** finalement. Elle dit avoir compris, mais j'en doute.

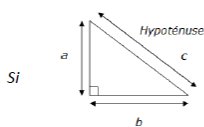
Je conclus en dessinant le triangle rectangle à côté, à gauche (en prévision de l'implication, pour éviter des confusions avec la réciproque...), interroge sur le vocabulaire « *Quelqu'un connaît le nom donné à ce côté du triangle rectangle ? (hypoténuse)* » « *comment le reconnaît-on ?* » « *c'est le plus grand côté* » « *ou ?* » « *il est en face de l'angle droit* » j'insiste sur ce 2^{ème} critère en expliquant qu'il est parfois délicat de reconnaître le plus grand côté, à vue d'œil.

Cette activité se conclut par : « *Mais à quoi ça sert ?* »

- **Problème : « A quoi ça sert ? »**

Je propose aux élèves ce problème avec le rappel du bilan de l'activité.

Si un triangle est rectangle alors le carré de son hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs de ses deux autres côtés...



alors

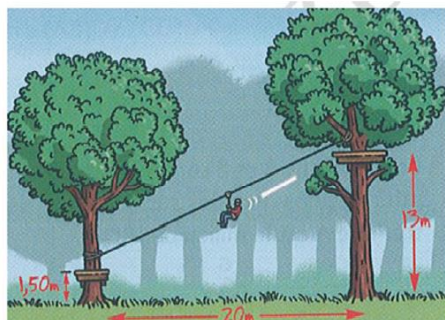
$$c^2 = a^2 + b^2$$

Jane vient d'acheter un terrain et souhaite en faire un parc d'accro-branche.

Elle veut installer une tyrolienne entre deux arbres et doit prévoir la longueur de câble à commander.

Ci-contre, un schéma représentant la situation.

Calculer la longueur du câble nécessaire.



Pour préciser l'importance d'avoir la valeur la plus exacte possible de la longueur du câble, je contextualise en disant que Jane a un budget « très serré » et elle ne peut pas se permettre d'approximer grossièrement la longueur du câble.

Je leur demande alors chacun d'expliquer leur raisonnement.

Un élève d'une des classes répond « on pourra calculer la longueur d'un côté », dans l'autre classe ils n'ont pas d'idée.

Des élèves insistent en me disant que de toute façon, il lui faudra plus de longueur pour attacher le câble aux arbres etc... (répondre que le câble ne sera pas fixé de cette manière par manque de sécurité mais par un système approprié)

Plusieurs élèves répondent qu'il lui faudra 20m de câble. Certains disent que non.

Puisqu'il y a deux solutions proposées et qu'ils faut « se décider » (pour poser le cadre des débats : leur mode d'argumentation est « celui qui répond le plus fort a raison » je leur dis explicitement que ce n'est pas une façon de convaincre). Un élève propose de comparer les longueurs avec le compas pour convaincre ceux qui doutent !

Ils comprennent qu'ils doivent trouver un triangle rectangle.

« Comment trouver la longueur du câble, la longueur du 3^{ème} côté de ce triangle rectangle, la longueur de son hypoténuse ? »

Un autre élève propose de calculer $13m + 1,5m$, en lui demandant aussi une argumentation, il n'en a pas, nous ne sommes donc pas convaincus. Les élèves eux-mêmes jouent le jeu de lui demander « pourquoi ? ».

Je les guide, en leur disant, que nous savons que nous allons utiliser l'égalité de l'activité, donc « De quel type de figure avons-nous besoin ? »

Un élève vient au tableau pour le dessiner, mais il dessine un quadrilatère, les autres élèves lui font remarquer.

La recherche du triangle rectangle n'est pas évidente mais un élève finit par le trouver en expliquant que les « $20m$ ne sont pas qu'au sol ».

Une fois le triangle dessiné, nous reportons les longueurs connues ($20m$ et $13m - 1,5m = 11,5m$ en reportant ces $1,5m$ jusqu'au 2^{ème} arbre).

Nous arrivons à la modélisation du problème par un triangle rectangle dont on connaît la longueur de deux de ses côtés.

Les élèves remarquent la similitude avec l'activité et pensent à calculer $20^2 + 11,5^2$ mais ils sont perturbés par la grandeur de leur résultat, car ils n'ont pas bien assimilé le fait qu'il calcule ainsi la longueur de l'hypoténuse au carré.

Ils doivent finir la réflexion et les calculs chez eux pour une classe.

Pour l'autre classe nous avons pu terminer en classe et parler de la « touche de la calculatrice » qui calcule le nombre dont le carré est connu. Faire une petite fiche explicative du calcul du carré d'un nombre et touche « racine carrée de la calculatrice ? »

- **Activité « réciproque »**

Bilan oral de la propriété précédente.

La réciproque est-elle vraie ?

Explication de la notion de réciproque d'une propriété

Avez-vous un exemple d'une propriété dont la réciproque serait fausse ?

Distribution des feuilles d'activités (les deux documents ci-dessous et les questions bleues soulignées):

Document 1 : tableau calculant $a^2 + b^2$

a \ b	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	2	5	10	17	26	37	50	65	82	101	122	145	170	197	226	257
2	5	8	13	20	29	40	53	68	85	104	125	148	173	200	229	260
3	10	13	18	25	34	45	58	73	90	109	130	153	178	205	234	265
4	17	20	25	32	41	52	65	80	97	116	137	160	185	212	241	272
5	26	29	34	41	50	61	74	89	106	125	146	169	194	221	250	281
6	37	40	45	52	61	72	85	100	117	136	157	180	205	232	261	292
7	50	53	58	65	74	85	98	113	130	149	170	193	218	245	274	305
8	65	68	73	80	89	100	113	128	145	164	185	208	233	260	289	320
9	82	85	90	97	106	117	130	145	162	181	202	225	250	277	306	337
10	101	104	109	116	125	136	149	164	181	200	221	244	269	296	325	356
11	122	125	130	137	146	157	170	185	202	221	242	265	290	317	346	377
12	145	148	153	160	169	180	193	208	225	244	265	288	313	340	369	400
13	170	173	178	185	194	205	218	233	250	269	290	313	338	365	394	425
14	197	200	205	212	221	232	245	260	277	296	317	340	365	392	421	452
15	226	229	234	241	250	261	274	289	306	325	346	369	394	421	450	481
16	257	260	265	272	281	292	305	320	337	356	377	400	425	452	481	512

Document 2 :

c	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
c ²	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361	400	441	484	529

1^{ère} question : à l'aide des documents : chercher trois nombres entiers (a ; b ; c) tels que $a^2 + b^2 = c^2$.

Les élèves doivent expliquer oralement les deux tableaux des documents

L'exemple de réciproque fausse donné par le professeur (aucun élève n'en a trouvé) : « si un quadrilatère est un rectangle alors c'est un parallélogramme » et « si un quadrilatère est un parallélogramme alors c'est un rectangle ».

Le premier tableau leur fait tout de suite penser à une table de multiplication, nous regardons ensemble si c'est bien cela. J'insiste sur le « titre » du document. On rappelle le sens du mot « carré » (lien avec l'aire d'un carré). J'encadre des cases et leur demande ce que représente ce nombre. Nous calculons les sommes pour vérifier les résultats. Le deuxième tableau est plus accessible pour eux. Je leur redemande ce qu'ils doivent trouver. **Ils confondent les valeurs de a ; b et c et leurs carrés.**

puis chercher les triplets.

Nous corrigeons, un élève différent donne un triplet.

Deuxième question : Construire deux triangles à partir des triplets.

Conjecture : Quelle semble être la nature de ces triangles ?

Troisième question : Construire un triangle ayant pour longueur 4,8cm ; 6,4cm et 8,1 cm.

Conjecture : il semble rectangle

Question : proposer un calcul pour le vérifier.

Nous cherchons un triplet ensemble. Pour une classe, la compréhension des tableaux et de la question ont été très difficiles à comprendre. Des élèves viennent ré-expliquer oralement. Les règles de « prise de paroles » sont un peu mieux respectées mais pas encore totalement intégrées. Une fois que tout le monde a compris grâce à l'explication d'une élève (celle qui avait eu de grosse difficulté de compréhension pour l'activité précédente), elle est remerciée par ses camarades. En autonomie, les élèves cherchent les 7 triplets.

Je choisis deux triplets (3 ;4 ;5) et (6 ;8 ;10) et les élèves doivent compléter l'énoncé, en construisant ces deux triangles en autonomie. Certains ne prennent pas tout de suite le compas mais finissent seul par le prendre pour aboutir aux constructions demandées.

Certains élèves calculent la somme des longueurs des deux plus petits côtés en oubliant les carrés. Utilisation de la calculatrice. Certains élèves n'isole pas le plus grand côté. On reprend la formule de la 1^{ère} question $a^2+b^2 = c^2$ en distinguant bien les trois nombres, le nombre c doit être le plus grand côté. Les élèves concluent alors que le triangle n'est pas rectangle. Je leur fais remarquer que la perception de la figure n'était pas bonne, je leur explique (leur demander) d'où peut venir cette erreur (equerre abimée, crayon al taillé, précision dans la construction, compas mal vissé etc..). Grâce à un calcul ou une propriété, nos conclusions sont indiscutables, irréfutables : pouvoir de persuasion.

- **Bilan**

Quelle nouvelle propriété avons-nous découverte ?

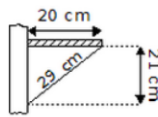
A quoi va-t-elle servir ?

- **Problème « A quoi ça sert ? »**

Manon a installé une étagère près de son bureau pour poser ses stylos.

Elle doit être certaine que son étagère est « bien horizontale » sinon ses stylos risqueront de rouler et tomber. Elle a pris les mesures indiquées sur le schéma ci-contre.

Vérifier que son étagère est « bien horizontale ».



Qu'est-ce que signifie mathématiquement le fait de vouloir une étagère « horizontale » ?

Une étagère bien droite, perpendiculaire au mur.

Que devons-vous alors vérifier pour Manon ?

Que le triangle est bien rectangle.

Quel triangle ?

Une élève va au tableau le repasser.

En autonomie les élèves finissent le calcul puis un élève va corriger.

Les élèves comprennent bien qu'elle nous permet de démontrer qu'un triangle est rectangle ou non.

Je n'évoque pas volontairement les liens entre théorème de Pythagore et contraposée pour démontrer qu'un triangle n'est pas rectangle. Je ne perçois pas encore les élèves sensibles à cette « nuance » de raisonnement.