

Les Arithmétiques de Diophante, extraits de la préface. (début et fin) Trad. Ver Eecke, revu AB

[P1] L'invention des <traitements des> problèmes dans les nombres, mon très honoré Dionysius, je sais que tu es très zélé pour l'apprendre, et j'ai donc essayé <ici>, en commençant par les fondements sur lesquels ces choses sont établies, d'exposer la nature et la puissance qui est dans les nombres.

Sans doute, l'affaire paraît elle bien difficile à aborder, tant qu'elle n'est pas encore familière – les âmes des débutants désespèrent de réussir – mais elle te deviendra facile à saisir, sous l'effet de ton désir zélé et de ce que je t'en montrerai. Car elle parvient vite à l'instruction, l'ambition qui s'adjoint l'enseignement.

[P2] [a] Pour toi qui sais, outre cela, que tous les nombres sont formés d'une certaine quantité d'unités, il est clairement établi qu'il existent à l'infini - on trouve ainsi parmi eux :

- les carrés, qui viennent d'un certain nombre multiplié par lui-même ; ce dernier nombre étant appelé le côté du <nombre> carré ;
- et encore les cubes, qui viennent de carrés multipliés par leur propre côté,
- et <les carré-carrés,> ceux qui viennent de carrés multipliés par eux-mêmes ;
- et <les carré-cubes,> ceux qui viennent de carrés qui sont multipliés par les cubes sur leurs côtés ;
- et <les cubo-cubes,> ceux qui viennent de cubes multipliés par eux-mêmes.

et partant de leur addition, de leur différence, de leur multiplication, ou de leurs rapports soit entre eux soit avec leurs propres racines, il résulte que de multiples problèmes arithmétiques peuvent être tressés ; ils se dénouent et résolvent cependant, si toutefois tu marches selon la voie indiquée.

[b] Il a ainsi été convenu que chacun des nombres ci-dessus, après avoir reçu une désignation abrégée, devient un élément de la théorie arithmétique.

- Ainsi, on appelle d'abord un nombre, s'il est carré, *puissance*, et son signe distinctif est <alors> le Δ avec pour indice Y : *puissances*;
- et un nombre, <provenant de la multiplication d'un carré sur son côté,> *cube* [*Kubos*] et son signe distinctif <est alors> K avec pour indice Y: K^Y .
- et un nombre, <provenant> d'un carré qu'on multiplie par lui-même, *carré-carré* [*Dunamodunamis*], et son signe est deux deltas ayant pour indice Y : $\Delta^Y \Delta$.
- et un nombre, <provenant> d'un carré multiplié par le cube sur son côté, *carré-cube* [*Dunamokubos*] et son signe propre est ΔK ayant pour indice Y: ΔK^Y .
- et un nombre, <provenant> du cube multiplié par lui-même, *cubo-cube* [*Kubokubos*], et son signe propre est deux kappas ayant comme indice Y: $K^Y K$.
- enfin tel nombre, qui ne posséderait aucune des particularités précédentes, tout en ayant en lui-même une certaine quantité d'unités, est appelé *nombre* non rapporté, et son signe distinctif est \mathfrak{S}

Il y a encore un autre signe pour ce qui est invariable dans les nombres déterminés, l'unité [*monas*], et son signe est le M qui a pour indice le O: M^O .

De même que les parties homonymes des nombres sont dénommées d'une manière analogue à ces nombres, ainsi, <analogue> au trois, le tiers, analogue au quatre, le quart; pour les nombres présentement dénommés, ici aussi, les parties homonymes sont appelées semblablement aux nombres : <analogue > au *nombre*, le *nombrière*; à la puissance, la *puissancière* ; au cube, le *cubièrme* ; au carré-carré, le *carré-carrèrme* ; au carré-cube, le *carré-cubièrme* ; au cubocube, le *cubocubièrme*. Chacune de ces <parties> possèdera sur le signe du nombre homonyme, le délinéament x qui caractérise son espèce.

[c] T'ayant exposé la dénomination de chacun des nombres, je passerai maintenant à leurs multiplications; qui te seront claires en vertu de ce qui a déjà été précédemment indiqué par le biais de leur appellation.

- Un *nombre*, par un *nombre* multiplié, produit une *puissance*; par une *puissance*, <il produit> un *cube*; par un *cube*, un *carré-carré*; par un *carré-carré*, un *carré-cube*; par un *carré-cube*, un *cubo-cube*.
- Tout nombre, multiplié par sa partie homonyme, fait une unité.
- L'unité, étant invariable et toujours constante, toute espèce multipliée par elle, fera la même espèce.
- Les parties homonymes multipliées par elles-mêmes, produiront des parties homonymes aux nombres. Ainsi, le *nombrière* <multiplié> par le *nombrière*, produit la *puissancière*; par la *puissancière*, le *cubième*; par le *cubième*, le *carrécarrière*; par le *carrécarrière*, le *carrécubième*; par le *carrécubième*, le *cubocubième*. Et tout ceci se produit de manière homonyme. La *puissancière* par le *nombrière* fait le *cubième* (...)
- Un défaut multiplié par un défaut fait un existant; un défaut par un existant, fait un défaut. Et le signe du défaut est un ψ tronqué tourné dans l'autre sens, Λ

[d] Les multiplications t'ayant été expliquées, les divisions des espèces proposées sont claires. Il est bien, par ailleurs, que celui qui aborde ce traité se soit exercé à l'addition, la soustraction et aux multiplications de tout ce qui se rapport à ces espèces; et à comment tu devras ajouter d'autres espèces à des espèces existantes ou en défaut, si toutefois elles ne sont pas en même quantité, et que <ces espèces ajoutées> soient existantes, ou bien semblablement existantes et déficientes; ou encore, à comment tu devras retrancher d'espèces existantes et à d'autres qui sont en défaut, des expressions qui seront soit existantes soit existantes et en défaut.

[e] Et ensuite de cela, à chaque fois que dans quelque problème il adviendra que quelques espèces soient égales à quelques autres, qui sont les mêmes mais pas en même quantité de part et d'autre, de chaque terme il faudra retrancher les semblables des semblables, jusqu'à ce que *un* type d'espèce devienne égal à *un* type d'espèce. Au cas où, de quelque manière, il subsiste de part et d'autre des espèces en défaut, il faudra ajouter les parties déficientes de chaque côté, et à nouveau retrancher les semblables des semblables, jusqu'à ce que ce, de chaque côté, une seule sorte d'espèce subsiste.

Que tout ceci soit cultivé dans les valeurs des énoncés, et, autant que possible, jusqu'à ce que une espèce subsiste égale à une espèce. Plus tard, je te montrerai comment, quand deux espèces subsistent égales à une seule, un tel cas est résolu.

[P3] Pour l'instant, cependant, nous nous engagerons dans la voie des propositions, sachant que nous avons réuni une abondante matière portant sur ces espèces elles-mêmes. Comme ces choses sont nombreuses et et d'une grande ampleur, et que pour cette raison même elles sont lentement maîtrisées par ceux qui les reçoivent; et comme de plus il y a en elles des choses difficiles à fixer en mémoire; j'ai jugé bon de diviser ce qui est susceptible de l'être en elles, et au tout premier chef de diviser celles qui viennent au début, à la manière des éléments, en allant de celles qui étaient plus simples vers celles qui sont plus retorses. De telle sorte qu'elles deviendront puis aisées à suivre pour les commençants, et leur introduction pourra être mémorisée; et quand à leur traitement dans leur entier, il se fera en treize livres.

PREMIERE SERIE DE PROBLEMES: I.1-11
--

I.1 Partager un nombre proposé en deux nombres dans une différence donnée. Que le nombre donné soit 100, la différence 40 unités. Trouver les nombres. Que le moindre soit posé un *nombre*. Le plus grand sera donc un *nombre*, 40 unités. Les deux ensemble seront donc 2 *nombres*, 40 unités. Ils sont donnés par ailleurs: 100 unités. Donc, 100 unités sont égales à 2 *nombres*, 40 unités. Et <il faut retrancher> les semblables des semblables. Je retranche des 100, 40 unités, et des 2 *nombres* et des 40 unités, semblablement, 40. Restent deux *nombres*, égaux à 60 unités. Chaque *nombre* devient donc 30 unités. Vers les valeurs: le moindre sera 30 unités, le plus grand 70 unités, et la preuve est claire.

I.2 Partager un nombre proposé en deux nombres dans un rapport donné. Qu'il soit ainsi prescrit de partager le nombre 60 en deux nombres, en rapport triple. Que le moindre soit posé un *nombre*. Le plus grand sera donc trois *nombres*, et le plus grand est le triple du moindre. Il faut en outre que les deux soient égaux à 60 unités. Mais les deux ensemble font 4 *nombres*. 4 *nombres*, sont donc égaux à 60 unités. Et le *nombre* est donc 15 unités. Le moindre sera donc 15 unités, et le plus grand 45 unités.

I.3 Partager un nombre proposé en deux nombres dans un rapport et une différence donnés. Qu'il soit ainsi prescrit de partager le nombre 80 en deux nombres, de sorte que le plus grand ait au moindre un rapport triple et l'excède encore de 4 unités. Que le moindre soit posé un *nombre*, le plus grand sera donc trois *nombres* et quatre unités - et le plus grand est <bien> triple du moindre et l'excède en outre de 4 unités. Reste que je veux que les deux fassent 80 unités; mais les deux, si on les met ensemble, font 4 *nombres* et 4 unités. 4 *nombres*, donc, et quatre unités font 80 unités. Et je retranche les semblables des semblables. Ce qui en reste, 76 unités sont égales à 4 *nombres*, et le *nombre* fait 19 unités. Vers les valeurs: le moindre sera 19 unités, le plus grand 61 (...)

I.4 Trouver deux nombres en rapport donné, de sorte que leur différence aussi soit donnée. Qu'il soit ainsi prescrit que le plus grand soit quintuple du moindre, et que leur différence fasse 20 unités. Que le moindre soit posé un *nombre*. Le plus grand sera donc cinq *nombres*. Je veux en outre que les cinq *nombres* excèdent un *nombre*, de 20 unités, mais leur différence est de 4 *nombres*: lesquels sont égaux à 20 unités. Le moindre nombre sera 5 unités, le plus grand 25 unités, et on a bien que le plus grand est quintuple du plus petit, et que la différence fait 20 unités.

I.5. Partager un nombre proposé en deux nombres de manière que, si des fractions données, mais différentes, de chacun des parties <du nombre partagé>, une fois additionnées, fassent un nombre donné. Le nombre donné doit toutefois être donné de telle façon, qu'ils soit dans un endroit compris entre les deux nombres qu'on obtient en prenant les fractions données, mais différentes, du nombre proposé au début. Qu'il soit ainsi prescrit de partager le 100 en deux nombres, de sorte que le tiers du premier nombre et le cinquième du second, additionnés ensemble, fassent 30 unités. Je pose le cinquième du second nombre, 1 *nombre*. Lui-même, par conséquent, sera 5 *nombres*. Le tiers du premier sera donc 30 unités en défaut d'un *nombre*; lui-même sera 90 unités en défaut de trois *nombres*. Je veux, enfin, que les deux ensembles fassent 100 unités. Mais les deux ensembles font 2 *nombres* et 90 unités. Ces dernières <sont> égales à 100 unités. Et les semblables des semblables. Les restes sont donc 10 unités, égales à 2 *nombres*. Le *nombre* donc sera 5 unités. Vers les valeurs. J'ai posé pour le cinquième du second, 1 *nombre* : ce sera 5 unités, et lui-même sera donc 25 unités ; pour le tiers du premier, 30 unités en défaut d'un *nombre*, ce sera 25 unités, et lui-même sera 75 unités. Et il reste bien que le tiers du premier avec le cinquième du second 30 unités. (...)

I.6. Partager un nombre proposé en deux nombres de manière qu'une fraction donnée du premier excède une fraction donnée de l'autre, d'un nombre donné. Ce nombre donné doit toutefois être moindre que le

nombre obtenu, lorsqu'est prise du nombre donné au début, la fraction donnée dans laquelle est la différence. Qu'il soit ainsi prescrit de partager le <nombre> 100 en deux nombres, de sorte que le quart du premier nombre excède le sixième du second, de 20 unités. Je pose le sixième du second nombre, 1 *nombre*. Lui-même, par conséquent, sera 6 *nombres*. Le quart du premier sera donc un *nombre* et 20 unités; lui-même sera 4 *nombres* et 80 unités. Je veux, enfin, que les deux ensembles fassent 100 unités, mais les deux ensembles font 10 *nombres* et 80 unités. Ces derniers <ont> égales à 100 unités. Et les semblables des semblables. Les restes, 10 *nombres* sont 20 unités, et le *nombre* donne 2 unités. Vers les valeurs. J'ai posé pour le sixième du second, 1 *nombre* : ce sera 2 unités; lui-même sera donc 12 unités ; pour le quart du premier, un *nombre* et 20 unités, ce sera 22 unités; lui-même sera donc 88 unités. Et il reste bien que le quart du premier excède le sixième du second, de 20 unités.

I.7. Du même nombre retrancher deux nombres donnés et faire que les restes aient l'un à l'autre un rapport donné. Qu'il soit ainsi prescrit de retrancher du même nombre le 100 et le 20, et qu'il faille faire que les plus grands soit le triple des plus petits. Qu'on pose le cherché, un *nombre*. Et si de ce dernier je retranche le 100, il reste un *nombre*, en défaut de 100 unités. Et avec le 20, il reste 1 *nombre*, en défaut de 20 unités. Et il faudra que les plus grands soient triple des plus petits. Donc trois fois les plus petits seront égaux aux plus grands, et par ailleurs trois fois les petits font 3 *nombres*, en défaut de 300 unités. Et ces dernières sont égales à 1 *nombre* 1, en défaut de 20 unités. Qu'on adjoigne le défaut de part et d'autre; il vient 3 *nombres*, égaux <à> 1 *nombre* et 280 unités. Et que soient retranchés les semblables des semblables. Il reste deux *nombres* égaux à 280 unités, il vient le *nombre*, 140 unités. Vers les valeurs. J'ai posé que le nombre cherché était 1 *nombre*, il sera donc 140 unités. Et si de ce dernier je retranche le <nombre> 100, les restes sont 40 unités; et si <je retranche> 20, les restes sont 120 unités. Et il reste <bien> que les plus grands sont triples des plus petits.

I.8 De deux nombres donnés ajouter le même nombre, et faire que les résultats aient l'un à l'autre un rapport donné. Il faut que le rapport donné soit moindre que le rapport, qu'à le plus grand des nombres donnés au moindre. Et qu'il soit ainsi prescrit qu'à 100 et qu'à 20 on ajoute le même nombre et faire que les plus grands soient triples des plus petits. Qu'on pose l'ajouté à chaque nombre, un *nombre*. (...)

I.9. De deux nombres donnés retrancher le même nombre, et faire que les restes aient l'un à l'autre un rapport donné. Le rapport donné doit toutefois être plus grand que le rapport, que le plus grand des donnés a avec le moindre. Qu'il soit ainsi prescrit de retrancher du 100 et du 20 le même nombre, et qu'il faille faire que les plus grands soit le sextuple des plus petits. Qu'on pose le soustrait de chaque nombre, 1 *nombre*. Et s'il est retranché du 100, il reste 100 unités en défaut d'un *nombre*; et si c'est du 20, il reste 20 unités en défaut d'un *nombre*. Et il faudra que les plus grands soit le 6^{uple} des plus petits. Donc six fois les moindres seront égaux aux plus grands, et par ailleurs six fois les petits font 120 unités en défaut de six *nombres*. Ces dernières sont égales à 100 unités, en défaut d'un *nombre*. Qu'on adjoigne le défaut de part et d'autre, et que soient retranchés les semblables des semblables. Les restes 5 *nombres* et 20 unités sont égaux, et il en vient le *nombre*, 4 unités. Vers les valeurs. J'ai posé que le nombre retranché de chacun était un *nombre*, il sera 4 unités. Et si ce dernier est retranché du 100, les restes sont 96 unités; et si <il est retranché> du 20, les restes sont 16 unités. Et il reste <bien> que les plus grands sont sextuples des plus petits.

I.10 A deux nombres donnés, ajouter au moindre des deux, et retrancher au plus grand le même nombre, et faire que ce qui en résulte ait au reste un rapport donné. Qu'il soit ainsi prescrit d'ajouter au 20, et de retrancher au 100, un même nombre et faire que les plus grands soit triples des plus petits. Que soit posé l'ajouté et retranché de chacun des nombres, un *nombre*.

(...)

I.11 Deux nombres étant donnés, ajouter l'un, retrancher l'autre du même nombre, et faire que les résultats aient l'un à l'autre un rapport donné. Qu'il soit prescrit d'ajouter le 20, d'enlever le 100 du même nombre et de faire que les plus grands soient triples des plus petits. Soit le cherché, un *nombre*.

(...)

UNE SERIE DE DEUX PROBLEMES INTERESSANTS POUR LEUR RICHESSE VERBALE

I.12. *Un nombre prescrit, le partager deux fois en deux nombres, de sorte que l'un de ceux qui viennent du premier partage ait à l'un de ceux du second partage un rapport donné, et que le restant de ceux du second partage, ait au restant de ceux du premier partage, un rapport donné. Qu'il soit ainsi prescrit de partager le 100 deux fois en deux nombres, de sorte que le plus grand de ceux qui viennent du premier partage soit double du moindre de ceux du second partage, et que le plus grand de ceux du second partage soit triple que le moindre de ceux du premier partage.*

Que soit posé le moindre de ceux du second partage un *nombre*. Le plus grand, donc, de ceux du premier partage sera deux *nombres*, le moindre, donc, de ceux du premier partage 100 unités, en défaut de deux *nombres*; et puisque qu'est triple de ce dernier le plus grand de ceux du second partage, ce sera 300 unités, en défaut de 6 *nombres*. Reste que ceux du second partage, additionnés ensemble, fassent 100 unités, mais additionnés ensemble ils font 300 unités, en défaut de 5 *nombres*, ces derniers égaux à 100 unités. Et il en vient le *nombre*, 40 unités.

Vers les valeurs. J'ai posé pour le plus grand de ceux du premier partage, 2 *nombres*, ce sera 80 unités; pour le moindre de ceux du même partage, 100 unités en défaut de 2 *nombres*, ce sera 20 unités; pour le plus grand de ceux du deuxième partage, 300 unités en défaut de six *nombres*, ce sera 60 unités; et pour le moindre de ceux du second partage, un *nombre*, ce sera 40 unités. Et la preuve est claire.

I.13 *Un nombre prescrit, le partager trois fois en deux nombres, de sorte que l'un de ceux qui viennent du premier partage ait à l'un de ceux du second partage un rapport donné, que le restant de ceux du second partage ait au restant de ceux du troisième partage, un rapport donné; et encore que le restant de ceux du troisième partage ait au restant de ceux du premier partage, un rapport donné. Qu'il soit ainsi prescrit de partager le 100 trois fois en deux nombres, de sorte que le plus grand de ceux qui viennent du premier partage soit triple du moindre de ceux du second partage, et que le plus grand de ceux du second partage soit double que le moindre de ceux du troisième partage; et encore que le plus grand de ceux du troisième partage soit le quadruple du moindre de ceux du premier partage.*

Que soit posé le moindre de ceux du troisième partage, un *nombre*. (...)

UN PROBLEME CELEBRE DU LIVRE II QUI CONCLUT UNE SERIE DE 8 PROBLEMES

II.1 *Trouver deux nombres de sorte que leur somme ait un rapport donné à la somme de leurs carrés. Qu'il soit ainsi prescrit que leur somme soit la dixième partie de la somme de leurs carrés.*

II.2 *Trouver deux nombres de sorte que leur différence ait un rapport donné à la différence de leurs carrés. Qu'il soit ainsi prescrit que leur différence soit la huitième partie de la différence de leurs carrés. Que soit posé le plus petit un *nombre*, le plus grand deux *nombres*.*

II.3 Trouver deux nombres de sorte que le produit de leur multiplication ait un rapport donné à leur somme, ou bien à leur différence. Qu'il soit ainsi prescrit, tout d'abord, que le <produit> de leur multiplication soit le sextuple de leur somme. Que les cherchés soient posés 1 nombre et 2 nombres ; ils peuvent en effet aussi être proposés [*proballesthai*] dans un rapport donné. (...)

II.4 Trouver deux nombres de sorte que la somme de leurs carrés ait un rapport donné à leur différence. Qu'on propose ainsi que la somme de leurs carrés soit décuple de leur différence. Que soit posé, à nouveau, pour l'un 1 nombre et pour l'autre, 2 nombres. (...)

II.5 Trouver deux nombres de sorte que la différence de leurs carrés ait un rapport donné aux deux ensemble. Qu'on propose ainsi que la différence de leurs carrés soit sextuple des deux ensemble. Que soient posés, à nouveau, les cherchés, pour l'un 1 nombre, pour l'autre 2 nombres. (...)

II.6 Trouver deux nombres en différence donnée, de sorte que la différence de leurs carrés excède d'un nombre donné leur différence. (...) Qu'il soit ainsi prescrit que leur différence est 2 unités, et la différence de leurs carrés excède leur différence de 20 unités. Que soit ainsi posé le moindre 1 nombre, le plus grand sera donc 1 nombre, 2 unités. (...)

II.7 Trouver deux nombres de sorte que la différence de leurs carrés soit, par rapport à leur différence, plus grande d'un nombre donné, qu'en raison. Qu'il soit ainsi prescrit que la différence de leurs carrés soit triple de leur différence, et l'excède en outre de 10 unités. Que soit ainsi posés la différence 2 unités, et le moindre 1 nombre, le plus grand sera donc un nombre, 2 unités. (...)

II.8 Partager un carré prescrit en deux carrés. Qu'il soit ainsi prescrit de partager le <nombre carré> 16 en deux <nombres> carrés.

Et que soit posé le premier, une *puissances*; l'autre sera donc 16 unités en défaut d'une *puissances*. Il faudra donc que 16 unités en défaut d'une *puissance* soit égal à un carré. Je forme donc le carré à partir d'un nombre quelconque de *nombres* en défaut d'autant d'unités qu'il y a dans le côté des 16 unités. Que ce soit 2 *nombres* en défaut de 4 unités. Le carré lui-même sera 4 *puissances*, 16 unités en défaut de 16 *nombres*. Lesquelles sont égales à 16 unités en défaut d'une *puissance*. Qu'on ajoute de part et d'autre le défaut, et les semblables des semblables.

5 *puissances*, donc sont égales à 16 *nombres*, et il en vient le *nombre*, 16 cinquièmes. L'un <des nombres trouvés> est 256 vingt-cinquièmes, l'autre 144 vingt-cinquièmes, et les deux ajoutés font 400 vingt-cinquièmes, soit encore 16 unités, et chacun d'eux est un carré.

Autrement

Que soit de nouveau le 16 à diviser en deux carrés.

Qu'on pose de nouveau que le côté du premier, un *nombre*, et pour l'autre un nombre quelconque de *nombres*, en défaut d'autant d'unités qu'il y en a dans le côté du carré à diviser. Que ce soit 2 *nombres* en défaut de 4 unités. Les carrés seront, pour l'un 1 *puissance*, pour l'autre 4 *puissances* 16 unités en défaut de 16 *nombres*. Je veux que les deux ajoutés ensemble soit égaux à 16 unités. 4 *puissances*, 16 unités en défaut de 16 *nombres* sont donc égaux à 16 unités. Et le côté du premier est 16^{5èmes}; lui-même sera 256^{25èmes}; le côté du second est 12^{5èmes}; lui-même sera donc 144^{25èmes}. Et la preuve est claire.